Örnek: $f(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \Rightarrow f'(x)$

Çözüm:

$$f'(x) = \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \cdot \frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'}{\frac{2x}{x^2+1}}$$

$$= \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \cdot \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^2+1}{2x}$$

$$= \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \cdot \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$$

Örnek: $f(x) = \sec^2\left(\ln \frac{\cos x}{2^x+1}\right) \Rightarrow f'(x)$

Çözüm:

$$f'(x) = 2\sec\left(\ln \frac{\cos x}{2^x+1}\right) \cdot \sec\left(\ln \frac{\cos x}{2^x+1}\right) \cdot \tan\left(\ln \frac{\cos x}{2^x+1}\right) \cdot \frac{\left(\frac{\cos x}{2^x+1}\right)'}{\frac{\cos x}{2^x+1}}$$

$$= 2\sec\left(\ln \frac{\cos x}{2^x+1}\right) \sec\left(\ln \frac{\cos x}{2^x+1}\right) \tan\left(\ln \frac{\cos x}{2^x+1}\right) \cdot \frac{-\sin x(2^x+1) - \cos x \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x+1)^2} \cdot \frac{2^x+1}{\cos x}$$

Örnek: $f(x)=\sqrt[3]{\sin^7\left(\tan\dfrac{\ln x-\sqrt[3]{x}}{x}\right)} \Rightarrow f'(x)=?$

Çözüm:

$$f(x)=\left(\sin\left(\tan\frac{\ln x-x^{1/3}}{x}\right)\right)^{7/3}$$

$$f'(x)=\frac{7}{3}\left(\sin\left(\tan\frac{\ln x-x^{1/3}}{x}\right)\right)^{4/3}\cdot\cos\left(\tan\frac{\ln x-x^{1/3}}{x}\right)$$

$$\cdot\sec^2\left(\frac{\ln x-x^{1/3}}{x}\right)\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)\cdot x-\left(\ln x-x^{1/3}\right)}{x^2}$$

Teorem: $A,B\subset\mathbb{R}$, $f:A\to B$ fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer fonksiyon $x_0\in A$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0)\neq 0$ ise f^{-1} ters fonksiyonu da $f(x_0)=y_0$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

dır.

! UYARI: Bu teoremden bir fonksiyonun tersinin bir noktadaki türevini hesaplamak için fonksiyonun tersini bulmaya gerek yoktur. Bu teorem genellikle fonksiyonların terslerini bulmanın zor olduğu hallerde fonksiyonların terslerinin türevlerini hesaplamada kullanılır.

Örnek: $f(x)=x^3+x \quad (f^{-1})'(2)=?$

Çözüm:

$$f(x_0)=2 \Rightarrow f(x_0)=x_0^3+x_0=2$$

$$x_0^3+x_0-2=0$$

$$x_0=1$$

$$f'(x)=3x^2+1 \qquad f'(1)=4$$

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$$

Örnek: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ olmak üzere f^{-1} fonksiyonun $y_0=\dfrac{1}{2}$ noktasındaki türevi?

Çözüm: $f^{-1}(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

$$f(x_0)=y_0=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{x_0+1}=\frac{1}{2} \qquad 2x_0=x_0+1$$

$$x_0=1$$

$$f'(x)=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

Bu teorem yardımıyla ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini araştıralım;

Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri

Trigonometrik fonksiyonları kotanjant ve kosinüsü $[0, \pi]$, sinüs ve tanjant fonksiyonlarını $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına kısıtlarsa birebir olurlar. Aynı zamanda örten olduklarından bu fonksiyonların terslerinden bahsedilebilir.

Örnek: $f(x) = \sin x$ $\quad f^{-1}(y) = \arcsin y$ olup $(f^{-1})'(y) = ?$

Çözüm:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

Burada dikkat etmemiz gereken bir husus vardır

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \mp\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ alınır.

Örnek: $f(x) = \cos x$ $\quad f^{-1}(y) = \arccos y \Rightarrow (f^{-1})'(y) = ?$

Çözüm:

$-1 \leq x \leq 1$ olmak üzere $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dir. Gerçekten

$$\left.\begin{aligned} \arcsin x = \alpha &\Rightarrow \sin\alpha = x \\ \arccos x = \beta &\Rightarrow \cos\beta = x \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\sin\alpha = \cos\beta \\ &\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} \\ &\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$(\arcsin x + \arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)'$$

$$(\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0 \quad \Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ dir.}$$

Örnek: $f(x)=\tan x$ $\quad f^{-1}(y)=\arctan y \Rightarrow (f^{-1})'(y)=?$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{dir.}$$

Benzer düşünce ile

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

dir.

Benzer düşünce ile

$f(x)=\operatorname{arcsec} x$ fonksiyonun türevi $f'(x)=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$

$f(x)=\operatorname{arccosec} x$ " " $f'(x)=\dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$

Örnek: $f(x)=\arcsin(2x^3+5x^2-1) \Rightarrow f'(x)=?$

Çözüm:

Bileşke fonksiyonun türevinden yararlanacağız,

$2x^3+5x^2-1=u$ dersek $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x^3+5x^2-1)^2}}\cdot(6x^2+10x)$$

Örnek: $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ üzerinde türevlenebilir ve türevinin

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu fonksiyonun tersi olan $f^{-1}(y) = a^y$ üstel fonksiyonun türevini bulabiliriz.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{a^y}\log_a e} = a^y . \log_e a = a^y . \ln a$$

olarak teorem yardımıyla bulunabilir.

$$\Rightarrow f(x) = a^x \quad \Rightarrow f'(x) = a^x . \ln a \text{ dır.}$$

Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

$f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ olduğundan üstel fonksiyonun türevi yardımıyla

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$ olur. O halde

$\Rightarrow (\sinh x)' = \cosh x$ dır. Benzer şekilde

$f(x) = \cosh x$	fonksiyonun türevi	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \tanh x$	" "	$f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$
$f(x) = \coth x$	" "	$f'(x) = -\operatorname{cosech}^2 x$
$f(x) = \operatorname{sech} x$	" "	$f'(x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
$f(x) = \operatorname{cosech} x$	" "	$f'(x) = -\operatorname{cosech} x \coth x$

Örnek! $f(x)=\sinh(3x^2+5x+1) \Rightarrow f'(x)=?$

$$f'(x)=\cosh(3x^2+5x+1).(6x+5)$$

Ters Hiperbolik fonksiyonların Türevi

Ters hiperbolik fonksiyonların türevleri de ters fonksiyon türevi kuralı yardımıyla hesaplanabilir.

Örnek! $f(x)=\sinh x \quad f^{-1}(y)=\text{arcsinh}\,y \Rightarrow (f^{-1})'(y)=?$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

bağımsız değişken x seçilirse

$$(\text{arcsinh}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$ dir.

Benzer şekilde diğer ters hiperbolik fonksiyonların türevi;

$$(\text{arccosh}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\text{arctanh}\,x)'=\frac{1}{1-x^2}$$

$$(\text{arccoth}\,x)'=\frac{1}{1-x^2}$$

$$(\text{arccosech}\,x)'=\frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\text{arcsech}\,x)'=\frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$